TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1 OSCILLATEURS LINÉAIRES 3

I. OSCILLATEURS HARMONIQUES AMORTIS 3
II. ANALYSE QUALITATIVE 5
1. Energétique 5
2. L'espace des phases 5
3. Visualisation de l'espace des phases 6
III. LES OSCILLATEURS « HARMONIQUES ». 7
1. Exemple d'oscillateur quasi-sinusoidal 8
2. Visualisation des phénomènes 9
3. Conclusions 11

CHAPITRE 2 LLES OSCILLATEURS PARAMÉTRIQUES 12

I. GÉNÉRALITÉS 12
II. CONDITIONS D'ÉTUDE 12
1. Le domaine mécanique 13
2. Le domaine électrique 13
III. UN OSCILLATEUR PARAMÉTRIQUE MÉCANIQUE 13
IV. UN OSCILLATEUR PARAMÉTRIQUE ÉLECTRIQUE 15
1. Un circuit RLC particulier 15
2. L'oscillateur paramétrique 16
V. APPROCHE THÉORIQUE 16
1. Equations différentielles 16
2. Etude assistée par ordinateur 18

CHAPITRE 3 LLES OSCILLATEURS NON LINÉAIRES 20

I. L'OSCILLATEUR DE VAN DER POL 20
1. Equation différentielle 20
2. Approche théorique assistée par ordinateur 21
3. Etude expérimentale 23
II. L'EFFET KERR OPTIQUE 26
1. Résolution de l'équation différentielle 26
2. Application à l'optique non linéaire 27
III. MATÉRIAU DOUBLEUR DE FRÉQUENCE 28

INTRODUCTION

En physique, lorsque l'on étudie un phénomène, on s'intéresse généralement d'abord aux effets prépondérants de celui-ci. Ceci revient souvent à linéariser les phénomènes caractéristiques du système étudié (on dit qu'il y a proportionnalité entre la cause et l'effet). Les effets non linéaires sont souvent considérés comme perturbatifs et de ce fait négligés, ils conduisent cependant quelquefois à des effets spectaculaires. On se propose d'étudier quelques uns de ces effets et leurs représentations dans différents systèmes de coordonnées.

Bien que les oscillateurs paramétriques soient des oscillateurs linéaires au sens mathématique, on leur consacrera ici un chapitre propre à cause de leur caractère double du à la limitation de leur amplitude par des phénomènes non linéaires.

Chapitre 1
OSCILLATEURS LINEAIRES

On appelle ainsi tout système physique dont l'un des paramètres caractéristiques satisfait à l'équation différentielle suivante :

$$A(t)\,\ddot{x} + B(t)\,\dot{x} + C(t)\,x = 0$$

Les fonctions qui apparaissent devant les termes en x ne dépendent pas de x. On restreindra volontairement notre étude aux cas où les fonctions $A(t)$ et $B(t)$ sont des constantes.

I. Oscillateurs harmoniques amortis

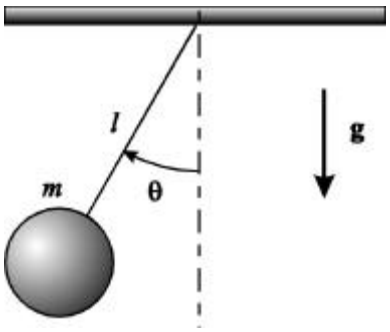
On a l'habitude d'étudier dans un premier temps l'oscillateur harmonique non amorti dont l'évolution d'un paramètre caractéristique se fait suivant une loi du type : $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ ou encore régit par l'équation différentielle du type : $\ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0$. Ces systèmes ne sont que des modèles, souvent grossiers, de systèmes physiques réels puisque l'on se rend très vite compte qu'il y a toujours amortissement (souvent modélisé par une force de frottement fluide). On introduit alors un paramètre λ supplémentaire qui permet d'en rendre compte.
Ce sont des systèmes physiques sont alors régis par une équation différentielle du type :

$$\ddot{x} + 2\lambda\,\dot{x} + \omega_0^2\, x = 0$$

Il faut noter que ceux ci ne sont plus harmoniques, en effet comme on le verra la solution n'est plus rigoureusement sinusoïdale, mais ils restent linéaires.

Exemples :

- Dans le domaine mécanique, le pendule simple :

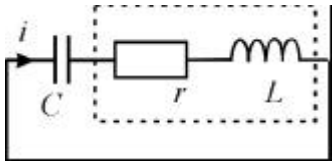


L'application des théorèmes fondamentaux de la mécanique conduit à la mise en équation suivante : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$ en admettant bien sûr que la liaison est parfaite et qu'il n'y a aucun frottement. Si on veut rendre compte de la puissance dissipée par frottements on peut ajouter un terme dépendant de $\dot{\theta}$: $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$. Il faut noter que cet oscillateur n'est pas linéaire sauf pour les petits angles où l'on peut faire l'approximation suivante : $\sin\theta \approx \theta$, approximation valable au deuxième ordre en θ.
L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\ \theta = 0$$

avec $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$.

- Dans le domaine électrique : un circuit(*r*, *L*), *C*.



L'application des lois électrocinétique conduit aux équations différentielles suivantes :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}\ i = 0$$

(où *i* est le paramètre d'évolution).
Si on choisit u_C (tension aux bornes du condensateur en convention récepteur) comme paramètre :

$$\ddot{u}_C + \frac{r}{L}\dot{u}_C + \frac{1}{LC}u_C = 0\,.$$

On obtient une équation formellement identique à la précédente.

II. Analyse qualitative

1.Energétique

Si l'oscillateur est considéré comme harmonique, l'absence de forces de frottements nous permet d'écrire la conservation de l'énergie mécanique pour le système :

$$E = E_c + E_p = C^{te}$$

En présence de forces de frottements l'expression de *E* reste la même mais celle-ci n'est plus constante au cours du temps.

Dans le cas du pendule simple ceci se traduit par :

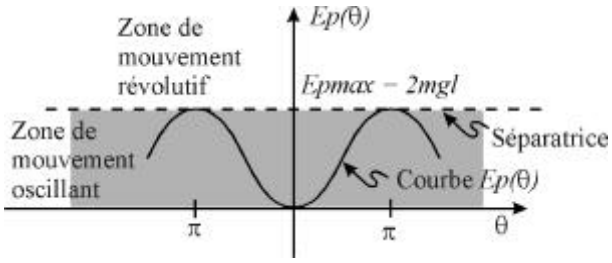
$$E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl\left(1 - \cos\theta\right)$$

le maximum d'énergie potentielle étant $E_{p\max} = 2mgl$ (obtenu pour $\theta = \pm\pi$).

Deux cas peuvent alors se présenter :

- Si $E > E_{p\max}$ le comportement du système est alors révolutif.
- Si $E < E_{p\max}$ le système a alors un comportement oscillatoire autour d'une position d'équilibre stable.

On peut représenter ceci graphiquement de façon classique :

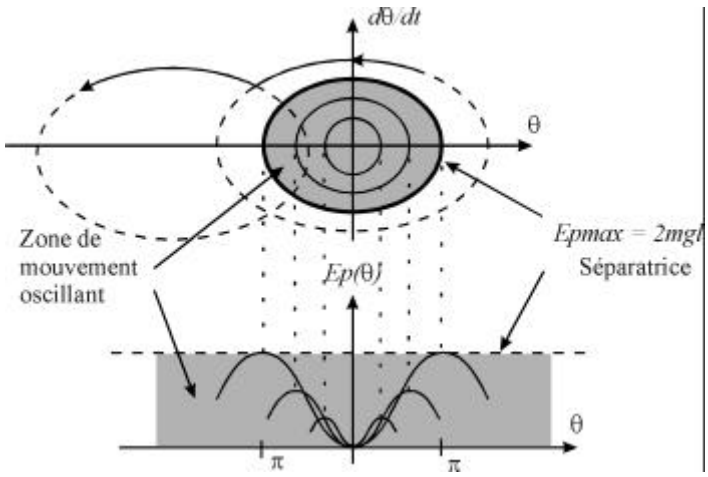


On a pris dans ce cas l'origine des potentiels à la position d'équilibre du pendule. Dans le cadre de cette représentation l'espace est divisé en deux parties : une zone ù le mouvement est révolutif (au dessus de la séparatrice) et une zone où le mouvement est oscillant autour de la position d'équilibre stable $\theta = 0$.

2.L'espace des phases

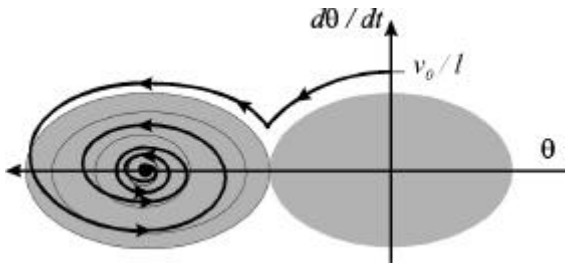
On a vu dans la description énergétique que l'énergie potentielle est une fonction de θ ou d'un paramètre caractéristique que nous appellerons *x* alors que l'énergie cinétique est une fonction de θ ou de *x*.

Il est donc tentant de représenter $\dot{\theta}$ en fonction de θ :



REMARQUES :

- Dans cette représentation, appelée espace des phases, on constate que si le mouvement est périodique la courbe est fermée. Si le mouvement est harmonique (ou supposé l'être), il est intéressant de faire l'étude dans le plan $\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega}, \theta\right)$ et dans ce cas la courbe est un cercle. On constate que l'écart à l'harmonicité se traduit par une déformation des cercles, ceux-ci ont tendance à devenir elliptiques.
- Les courbes représentatives du mouvement peuvent alors être interprétées comme des courbes de niveau énergétique. On peut alors décrire le comportement du système par le déplacement d'un point figuratif sur une ligne isoénergétique (toujours en l'absencede frottements).
- En présence d'amortissements la courbe n'est plus fermée et le système tend vers sa position d'équilibre stable, le point figuratif se déplace alors vers un puits de potentiel comme le présente la figure suivante :



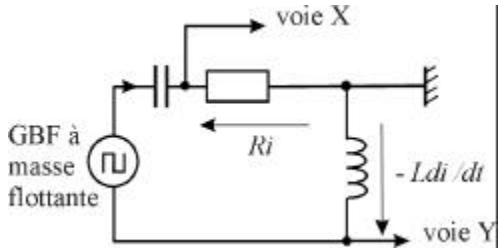
3.Visualisation de l'espace des phases

- Dans le domaine mécanique la situation est délicate mais cela reste possible grâce à PENDULOR de ORPHY. La démarche est classique, on enregistre $\theta(t)$ et on construit une nouvelle variable $\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta}{dt}$, puis la commande GRAPHE COORDONNEES permet de tracer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\theta(t)$. Attention dans le menu GRAPHE COORDONNEES il faut passer en mode

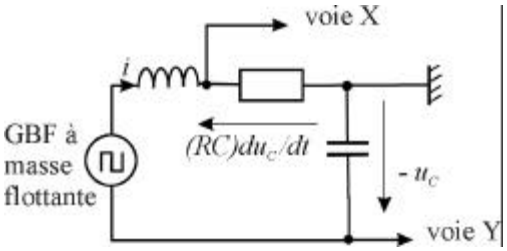
paramétrique. Il peut être intéressant de déduire de ce graphe le facteur de qualité de l'oscillateur par mesure de θ_{max} aux points où $\dot{\theta}(t) = 0$. En effet le décrément logarithmique δ s'exprime par :

$$\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right) = \frac{\pi}{Q} \text{ si } Q >> 1.$$

- Dans le domaine électrique l'étude est très intéressante, on réalise les montages suivants :



Dans ce cas on observe en mode XY deux spirales qui convergent vers un attracteur unique. Ceci était prévisible puisque l'intensité du courant électrique oscille entre i_{max} et 0 et entre 0 et i_{max} suivant l'état du signal carré du générateur.



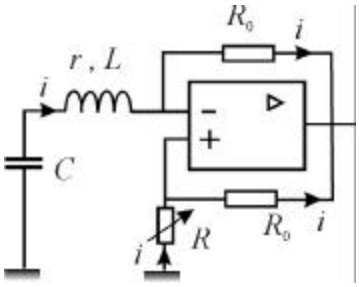
Ici la situation est différente puisque u_C n'oscille pas entre une valeur maximum et 0 mais entre $+u_{C\max}$ et 0 et entre 0 et $-u_{C\max}$, d'où la génération de deux attracteurs au lieu d'un. On peut retrouver la situation précédente (c-a-d obtenir un attracteur unique) en réglant l'offset du générateur de façon à établir des créneaux évoluant entre 0 et +*E*.

III. Les oscillateurs « harmoniques ».

Bien qu'ils n'existent pas dans la réalité, on peut en approcher la réalisation en compensant les pertes d'énergie dues à l'amortissement par la présence d'un générateur adapté à l'oscillateur.

1.Exemple d'oscillateur quasi-sinusoidal

L'oscillateur à résistance négative. On réalise le montage suivant :



Pour traduire exactement le comportement du dispositif on établit les équations différentielles qui régissent son comportement.

- En régime linéaire : $v^+ = v^- = -R\,i$

  $$v^- = -\frac{L\,di}{dt} - u_C - ri \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{(r-R)}{L}\frac{di}{dt} - \frac{1}{LC}i = 0 \quad (1)$$

  Il est impossible de maintenir $R = r$ de façon stricte, on prend $R \approx r$ avec $R > r$ le coefficient devant le terme du premier ordre est négatif, cela entraine que les oscillations croissent de façon exponentielle jusqu'à la saturation de l'ampli.op. Comme $R \approx r$ la croissance est lente et la constante de temps est $\tau = \frac{L}{R-r}$.

- En régime non linéaire $V_S = \pm V_{\text{sat}}$ et on note i_{sat} l'intensité du courant électrique qui circule dans les mêmes branches que précédemment. Attention celui-ci n'est pas constant et il varie entre une valeur minimum i_S et une valeur maximum i_M.

  $$v^- = -\frac{L\,di_{\text{sat}}}{dt} - u_C - ri_{\text{sat}} \quad \text{et} \quad v^- \pm V_{\text{sat}} = R_0 i_{\text{sat}}$$

  $$R_0 i_{\text{sat}} \pm V_{\text{sat}} = -\frac{L\,di_{\text{sat}}}{dt} - u_C - ri_{\text{sat}}$$

On dérive la dernière expression et on déduit :

$$\frac{d^2 i_{\text{sat}}}{dt^2} + \left(\frac{r+R_0}{L}\right)\frac{di_{\text{sat}}}{dt} + \omega_0^2 i_{\text{sat}} = 0 \quad (2)$$

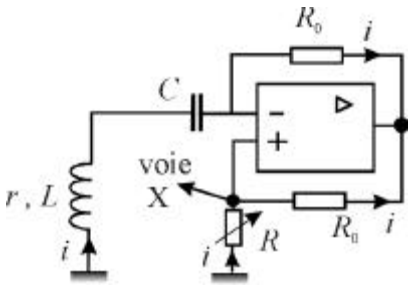
Cette équation est différente de la précédente (équation (1)) dans la mesure où le terme du premier ordre est positif, cela entraîne que les oscillations décroissent de façon exponentielle jusqu'à 0 et ce à la constante de temps

$$\tau = \frac{L}{R_0 + r}$$

On dispose maintenant du système d'équations différentielles qui régit le comportement de l'oscillateur.

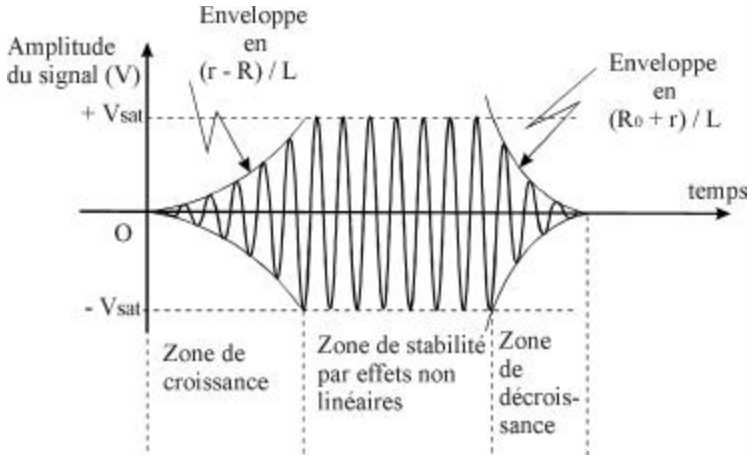
2.Visualisation des phénomènes

On se propose d'abord de suivre l'évolution de l'intensité au cours du temps à partir du montage suivant :



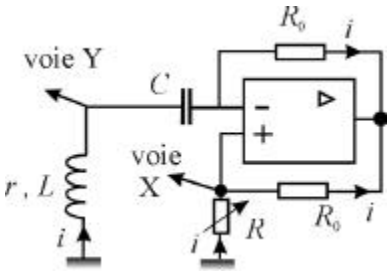
- Il est intéressant de choisir les valeurs de L et de C pour avoir une fréquence de l'ordre du kHz, ceci nous permettra de faire ensuite des mesures correctes au pont RLC qui fonctionne à une fréquence de 1kHz..
- Certains montages présentent des oscillateurs à résistance négative où la résistance variable est R_0, celui-ci permet la mesure et la comparaison à la théorie, des constantes de temps de croissance et de décroissance du signal.
- Pour éteindre le montage on pourra court-circuiter *R* dans la boucle de réaction.

L'observation du signal sur la voie X conduit à l'oscillogramme suivant :

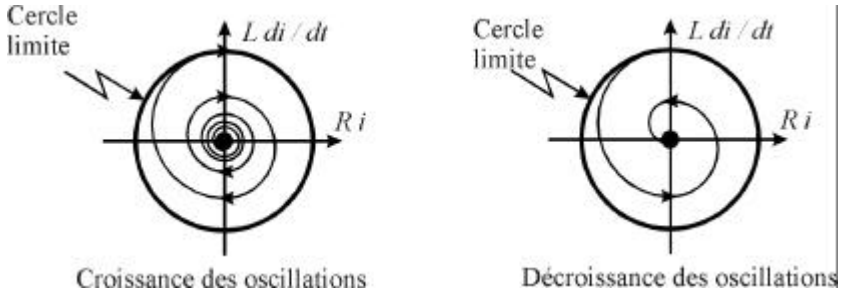


Il peut être intéressant si l'on dispose d'un oscilloscope numérique d'enregistrer le signal précédent et de vérifier la valeur de la fréquence d'oscillation, les constantes de temps de croissance et de décroissance du signal.

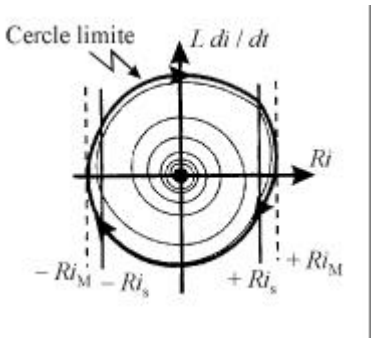
On peut aussi visualiser le même phénomène directement dans le plan de phase, en reprenant le montage précédant et en ajoutant une connexion de la bobine vers la voie Y de l'oscilloscope en mode XY :



Si on décompose les deux phénomènes et qu'on les observe séparément, on visualisera sur l'écran de l'oscilloscope les deux spirales suivantes :



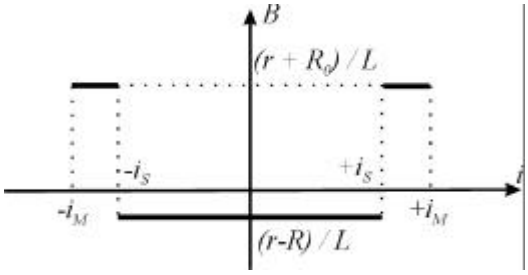
Il est intéressant d'examiner ce qu'il se passe au niveau du cercle limite et pour bien comprendre il est judicieux d'exagérer les différences de courbure des spirales en modifiant les valeurs des résistances. On observe alors nettement une ligne correspondant au passage d'un mode à l'autre. On peut d'ailleurs vérifier que celui-ci se fait à la valeur de $R\,i_{\text{sat}}$.



Il est important de noter que pour de telles valeurs des résistances l'oscillateur est fortement non linéaire. On peut donc comprendre que la quasi-linéarité du montage sera d'autant meilleure que les valeurs des résistances sont proches.

REMARQUE : Si on ne dispose pas d'un oscilloscope numérique on peut néanmoins visualiser ces figures en rendant les phénomènes périodiques. On peut alimenter le montage par un GBF en signal carré de type TTL débitant un courant suffisant ou encore insérer un FET dans une des boucles et alimenter celui-ci par le même signal carré. Ces montages sont un peu délicats car le composant introduit une impédance supplémentaire dont il faut tenir compte.

Si on reprend les deux équations différentielles (1) et (2) et que l'on représente les variations du coefficient du premier ordre *B* en fonction du paramètre caractéristique $i(t)$ on obtient la fonction suivante :



Il sera très intéressant de comparer cette courbe à celle obtenue pour l'oscillateur de Van der Pol pour interpréter le comportement de ce dernier comme le cas limite de celui de l'oscillateur à résistance négative. Il faut noter que pour des valeurs faible de la différence entre $\frac{r-R}{L}$ et $\frac{r+R_0}{L}$ le puits est très « plat » et on peut comprendre que l'écart à l'harmonicité soit faible.

3.Conclusions

L'oscillateur à résistance négative est non linéaire (et non harmonique) mais on peut choisir les résistances pour que l'écart à la linéarité soit si faible qu'il devienne imperceptible. Cela revient dans le cas du pendule à le laisser osciller dans un environnement où les frottements sont très faibles et pour des amplitudes telles que $\sin\theta \approx \theta$.

Chapitre 2

LES OSCILLATEURS PARAMETRIQUES

I. Généralités

Ils sont souvent considérés comme des systèmes non linéaires car l'amplitude du paramètre caractéristique est limité par des effets non linéaires, mais l'équation différentielle qui régit son comportement reste linéaire :

$$\ddot{x} + B(t)\,\dot{x} + C(t)\,x = 0$$

II. Conditions d'étude

On restreindra notre étude au cas où B est une constante et on peut, par le biais d'un changement de variable (du type $x' = x \exp \lambda t$), se ramener à l'équation suivante :

$$\ddot{x} + \omega^2(t)\,x = 0$$

On va s'intéresser au cas particulier où $\omega^2(t)$ est une fonction périodique, l'équation précédente porte le nom d'équation de Hill. La fonction $\omega^2(t)$ est souvent une fonction simple des paramètres de l'oscillateur (d'où le nom d'oscillateur paramétrique). Il s'agit de faire varier ce terme de façon périodique. On va encore restreindre notre étude au cas où cette fonction est une fonction créneau, c-à-d que la fonction $\omega^2(t)$ s'exprime par :

$$\begin{cases} \omega = \omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega \text{ pour } 0 \le t \le \dfrac{T}{2} \\ \omega = \omega_2 = \omega_0 - \Delta\omega \text{ pour } \dfrac{T}{2} \le t \le 0 \end{cases}$$

Cette restriction a l'avantage de ramener l'étude du système paramétrique à celle d'un oscillateur linéaire régit par deux équations différentielles connues :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_1^2(t)\, x = 0 \\ \ddot{x} + \omega_2^2(t)\, x = 0 \end{cases}$$

Avant de résoudre ces équations on se propose de présenter les dispositifs expérimentaux qui vont servir de support à cette étude.

1.Le domaine mécanique

Le pendule simple : $\omega^2 = \frac{g}{l}$ (avec les approximations qui s'imposent), on peut faire varier soit *g* soit *l*. La variation apparente de *g* peut être obtenue en déplaçant périodiquement le support du pendule de telle sorte que dans le référentiel non galiléen attaché au pendule une force se rajoute et induit une modification apparente de *g* dans ce référentiel. Il faut noter que cette approche est dangereuse car elle peut induire une confusion dans l'esprit des élèves. En effet l'étude est faite dans le référentiel non galiléen lié au pendule mais l'observation du phénomène se fait dans le référentiel galiléen lié au sol. Il est souvent difficile de faire sentir aux élèves la différence entre référentiel et repère, je ne préfère donc pas développer cet exemple.

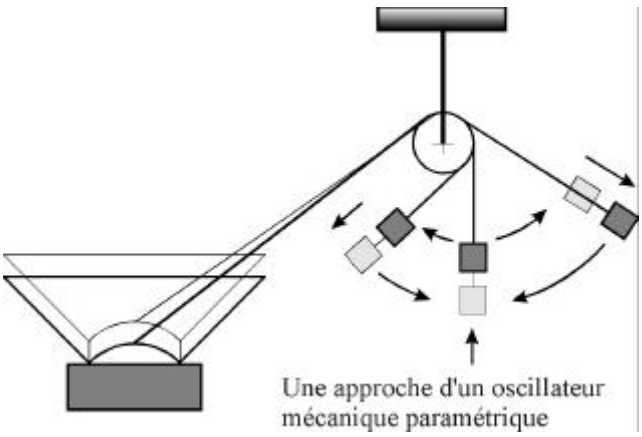
On peut aussi faire varier *l*, ce que l'on étudiera.

2.Le domaine électrique

Un circuit RLC série : $\omega^2 = \frac{1}{LC}$. On peut soit faire varier *L* soit faire varier *C*. La variation réelle de l'inductance d'une bobine ou de la capacité d'un condensateur est souvent délicate, on proposera donc l'étude du montage proposé dans le B.U.P. n° 747 par Mrs BALLY et BOISSE.

III. Un oscillateur paramétrique mécanique

On peut facilement réaliser le montage suivant :



Une approche d'un oscillateur mécanique paramétrique

Dans un premier temps on mesure la période propre du pendule sur plusieurs périodes (environ 20) grâce à un chronomètre ce qui donne ω_0. La poulie doit être de

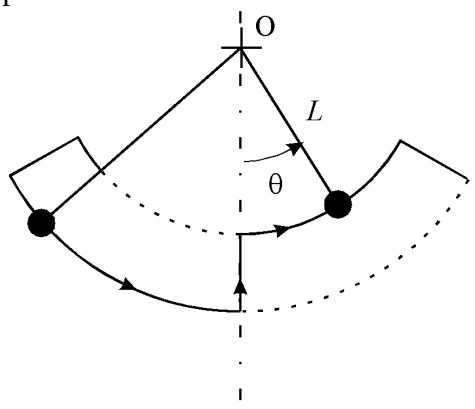
faible diamètre et présenter peu de frottements. Une poulie avec gorge présente l'avantage d'éviter la sortie du fil du pendule.

Le haut parleur doit être alimenté par un générateur basse fréquence précis. On pourrait penser qu'un signal carré puisse permettre de réaliser la condition :

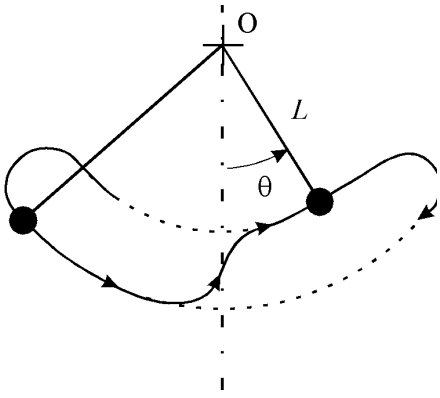
$$\begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{g}{L - \Delta L} \\ \omega_2^2 = \dfrac{g}{L + \Delta L} \end{cases}$$

En fait, il n'en est rien, le haut parleur est constitué, du point de vue électrique, d'une bobine à la fois inductive et résistive, ce qui constitue un circuit *RL*, donc un circuit essentiellement dérivateur. Un signal triangulaire peut donc faire l'affaire, il est cependant préférable d'utiliser un signal sinusoïdal dont on augmente démesurément l'amplitude bien au delà de la « saturation » du générateur, ce qui permet d'obtenir le résultat escompté. Suivant les performances du générateur utilisé, il peut être nécessaire d'intercaler avant le haut-parleur un amplificateur de puissance.

En fait, la trajectoire de la masse n'est pas exactement celle que l'on attend mais l'écart est suffisamment faible pour que la modélisation n'entraîne pas d'erreurs importantes.



Trajectoire modélisée



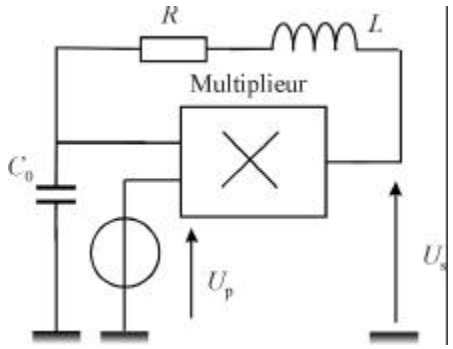
Trajectoire réelle

On observe que le pendule se met à osciller spontanément pour une fréquence particulière telle que $\omega_p = 2\omega_0$. De plus, si la variation de la longueur du pendule est faible il faut à la fois être très proche de la valeur exacte de ω_p et attendre longtemps pour voir naître les oscillations.

On constate donc expérimentalement que les oscillations n'apparaissent que pour une série de fréquences proches d'une fréquence particulière et que cette condition dépend fortement de l'amplitude de la perturbation.

IV. Un oscillateur paramétrique électrique

On propose de réaliser le montage suivant :



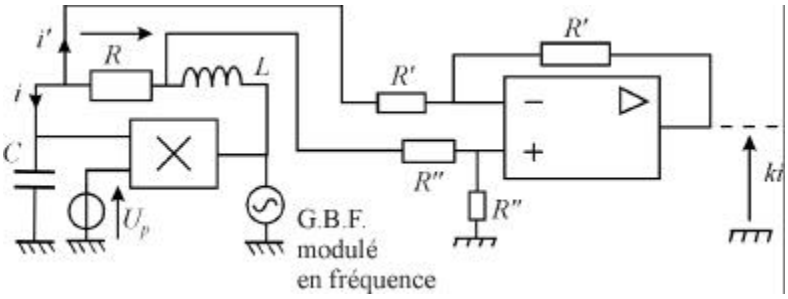
Les composants utilisés ont été les suivants :

- *R* est un potentiomètre de résistance ajustable que l'on réglera par défaut à la valeur de 10 Ω .
- *L* est l'inductance d'une bobine à noyau de fer ajustable de 0.1H si celui-ci est complètement sorti et de résistance interne del'ordre de 10 Ω .
- *C* est la capacité d'un condensateur de 220 nF.
- Le multiplieur est un circuit intégré AD734 AD633JN.
- U_p est la tension délivrée par un générateur basse fréquence classique.
- U_S est la tension de sortie visualisée sur un oscilloscope.

Toutes les valeurs données sont celles mesurées grâce à un pont "PHILLIPS", donc à une fréquence de 1000Hz. Pour permettre une vérification des résultats obtenus la fréquence d'oscillation du système sera aussi de l'ordre du kilohertz.

1.Un circuit RLC particulier

La théorie prouve que ce montage est équivalent à un circuit RLC série dont la capacité du condensateur dépend de la tension U_p. On peut mettre ceci en évidence en visualisant la courbe de résonance du montage pour une tension donnée et montrer que la fréquence de résonance se déplace avec la valeur de la tension. Le montage suivant permet la visualisation du phénomène.



Le circuit comportant le multiplieur est équivalent à un circuit R.L.C. série, on l'alimente grâce à un G.B.F. modulé en fréquence (fonction notée « sweep » sur l'appareil, signifie balayage en anglais) entre 100 Hz et 10kHz (la fréquence de résonance étant de 1 kHz). Grâce à un montage différentiateur on prélève la tension aux bornes de la résistance (qui est une image de l'intensité du courant électrique) qui sera visualisée sur la voie X d'un oscilloscope. A l'arrière du G.B.F. on peut récupérer la rampe qui pilote le balayage en fréquence et la visualiser sur la voie Y. Il suffit de passer en mode XY pour présenter la courbe de résonance du circuit. Il est important de noter que les valeurs de R' et R'' doivent être grandes devant l'impédance du condensateur afin de pouvoir négliger i' devant i.

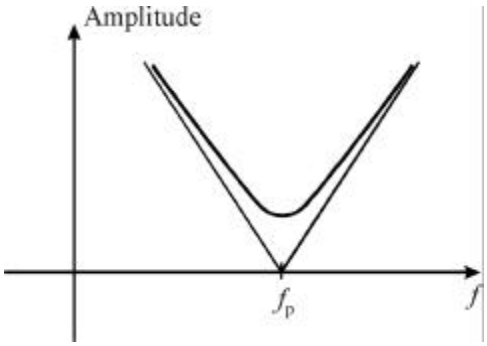
Suivant la valeur de R (souvent faible) choisie il peut être nécessaire d'ajuster les valeurs de R' et R'' afin d'obtenir une amplitude suffisante en sortie. On constate, en modifiant la valeur de U_p que le pic de résonance se déplace.

On peut aussi, en faisant varier la valeur de R, montrer l'influence de la résistance sur le caractère plus ou moins aigu de la résonance.

2.L'oscillateur paramétrique

On reprend le montage de base constitué du multiplieur, mais cette fois la tension U_p est un signal carré. Comme pour l'oscillateur mécanique on constate que le montage oscille si le signal carré est de fréquence double de la fréquence propre. On constate de même que cette condition est d'autant plus restrictive que l'amplitude du signal carré est faible.

Ces deux observations semblent présenter un caractère général. En fait si l'on reporte l'amplitude du signal obtenu en fonction de la fréquence du signal carré souvent appelé signal de pompe on relève une courbe du type suivant :



V. Approche théorique

1.Equations différentielles

On propose de centrer l'étude sur le montage électronique.
Etablissons les relations qui lient les tensions :

$$U_S = u_C + RC\,\dot{u}_C + LC\,\ddot{u}_C$$
$$U_S = k_m\, u_C\, U_p$$

où l'on a posé $i = \frac{d\,q}{d\,t}$ et où k_m est le coefficient du multiplieur (ici 0,1 V^{-1}). De ces deux relations on tire l'équation différentielle :

$$\ddot{u}_C + \frac{R}{L}\dot{u}_C + \frac{1 - k_m U_p}{LC} u_C = 0$$

On constate qu'effectivement tout se passe comme si le condensateur avait une capacité dépendant de la tension U_p par la relation $C' = \frac{C}{1 - k_m U_p}$. Si U_p varie alors C' varie, on a ainsi réalisé un oscillateur paramétrique.
U_p est un signal carré variant entre $-E$ et $+E$ et de pulsation ω_p ce qui nous permet d'écrire la pulsation $\omega^2(t)$ sous la forme :

$$\omega^2(t) = \frac{1 + k_m E}{LC} \text{ pour } n\,T_0 < t < \left(n + \frac{1}{2}\right) T_0$$

$$\omega^2(t) = \frac{1 - k_m E}{LC} \text{ pour } \left(n + \frac{1}{2}\right) T_0 < t < (n+1)\,T_0$$

où $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ et n = 0,1,2,3....

Si on pose $\Omega^2 = \frac{k_m\,E}{LC}$ le système précédent se ramène au système suivant :

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + \Omega^2 \text{ pour } n\,T_0 < t < \left(n + \frac{1}{2}\right) T_0 \quad \text{phase 1}$$

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 - \Omega^2 \text{ pour } \left(n + \frac{1}{2}\right) T_0 < t < (n+1)\,T_0 \text{ phase 2}$$

On a donc ramené notre étude à celle de deux équations différentielles connues. Les solutions sont, pour les phase 1 et 2, de type sinusoïdale, on peut écrire :

$$x_1(t) = C_1 \sin\omega_1\,t + D_1 \cos\omega_1\,t$$

$$x_2(t) = C_2 \sin\omega_2\,t + D_2 \cos\omega_2\,t$$

Ces solutions doivent être continues et égales en $t = 0$ (car dans notre exemple la charge est continue aux bornes de *C*) ce qui impose :

$$D_1 = D_2 \text{ pour } x(0)$$

$$\omega_1 C_1 = \omega_2 C_2 \text{ pour } \dot{x}(0)$$

Ceci nous donne deux équations pour quatre inconnues il reste deux équations à établir. Il suffit de traduire le fait que l'amplitude et la vitesse sont multipliées par un coefficient *k* de $\frac{-\pi}{\omega_p}$ à $\frac{+\pi}{\omega_p}$ pour établir les deux équations supplémentaires. On obtient finalement un système de deux équations à deux inconnues homogène.
Pour éviter la solution triviale nulle il faut que le déterminant de ce système soit nul, ce qui se traduit par

$$k^2 - 2\,A\,k + 1 = 0$$

avec $A = \cos\frac{\omega_1 \pi}{\omega_p}\cos\frac{\omega_2 \pi}{\omega_p} - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2}\sin\frac{\omega_1 \pi}{\omega_p}\sin\frac{\omega_2 \pi}{\omega_p}$

Il y a amplification (instabilité) si les racines de l'équation du second degré sont réelles, ceci se traduit au niveau du discriminant par : $\Delta' = A^2 - 1 > 0$.

Deux cas : $A > 1$ ou $A < 1$.

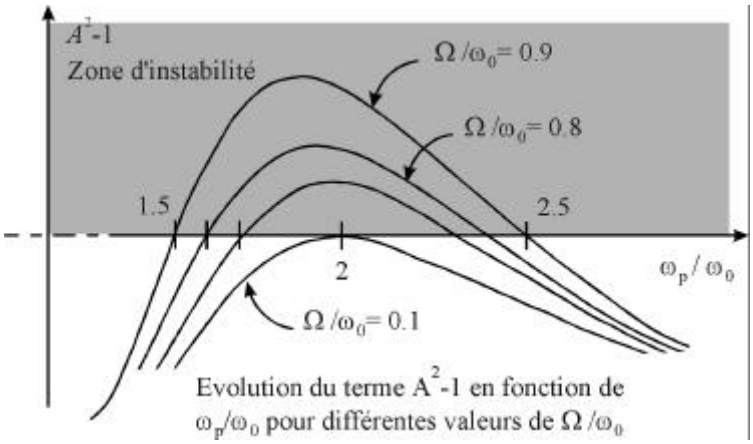
$A > 1 \quad \Rightarrow \quad k = A \pm \sqrt{A^2 - 1}$ et seule la solution positive est à retenir sinon $|k| < 1$ (et il y a amortissements et non pas amplification).

En conclusion il faut retenir qu'après chaque cycle *x* et $\dot{x}$ sont multipliés par $k > 1$et ce toujours dans le même sens, d'où l'amplification paramétrique. L'amplification obtenue à chaque période dépend donc fortement de *A* par l'intermédiaire de *k*. On propose dans le paragraphe suivant d'étudier le comportement de ce coefficient.

2.Etude assistée par ordinateur

Le logiciel que je vous propose d'utiliser pour cette étude a été développé par un collègue du Lycée Thiers de Marseille M. LEPRETRE. Je vous fournirai une disquette de démonstration (ainsi que les coordonnées du concepteur) de ce logiciel qui présente énormément de qualités et de possibilités.

L'expression de $A^2 - 1$ a été programmée, le logiciel propose les tracés suivants :



Evolution du terme A^2-1 en fonction de ω_p/ω_0 pour différentes valeurs de Ω/ω_0

On peut faire les observations suivantes :

- La courbe passe au dessus de l'axe $\frac{\omega_p}{\omega_0}$ autour de la valeur $\omega_p = 2\omega_0$. On constate que le système oscille pour une pulsation $\omega_p \approx 2\omega_0$.
- Le coefficient de multiplication *k* de la vitesse et de l'amplitude croît avec Ω c-à-d avec l'amplitude du signal carré U_p. On observe effectivement que plus l'amplitude de U_p est grande plus l'instabilité progresse rapidement.
- La largeur de la zone d'instabilité croît avec Ω. On constate effectivement qu'il est possible de s'écarter de la condition $\omega_p = 2\omega_0$ pour des valeurs importantes de l'amplitude et ce d'autant plus que cette amplitude est importante.

- Le maximum de la courbe croît avec l'amplitude de U_p et se décale vers des petites valeurs plus faibles du rapport $\frac{\omega_p}{\omega_0}$. Ce phénomène est plus difficile à mettre en évidence bien que cela soit possible avec un G.B.F. de très bonne qualité.

Toutes ces observations se font aussi sur le pendule paramétrique construit avec le haut-parleur mais leur analyse quantitative est plus délicate.

Chapitre 3
LES OSCILLATEURS NON LINEAIRES

On va introduire cette étude à partir de celle faite à propos de la résistance négative qui avait été considérée dans le premier chapitre comme un oscillateur quasi-sinusoïdal. Nous avions établi que, pour que les oscillations puissent prendre naissance au niveau du système, il était nécessaire que dans l'équation différentielle le coefficient devant le terme du premier ordre soit négatif. Ensuite pour que ces mêmes oscillations soient limitées en amplitudes il faut que ce coefficient change de signe, le système évolue alors sur un cercle limite. C'est cette idée qui est à la base de l'oscillateur de Van der Pol que nous allons étudier dans ce chapitre.

I. L'oscillateur de Van der Pol

1.Equation différentielle

Partant de l'analyse faite en introduction M. Van der Pol propose l'équation différentielle suivante

$$\ddot{y} - \varepsilon\omega\left(1 - \frac{y^2}{y_0^2}\right)\dot{y} + \omega^2 y = 0$$

où y_0 et ε sont des constantes caractéristiques du système.

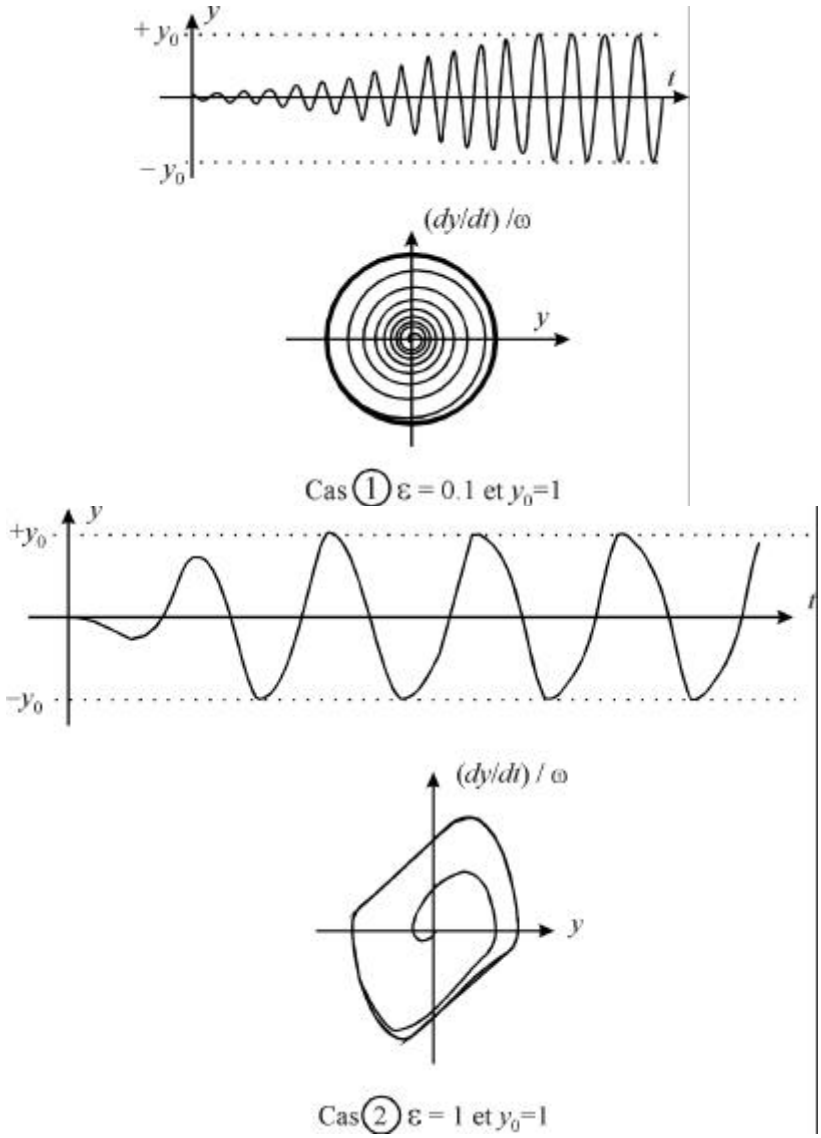
Si on analyse cette équation on constate que pour des amplitudes faibles $y << y_0$ la fraction est négligeable devant l'unité et l'équation différentielle se ramène à une équation différentielle correspondant à la naissance d'oscillations dont l'amplitude croît exponentiellement puisque le coefficient du terme du premier ordre est $\approx -\varepsilon\omega$.

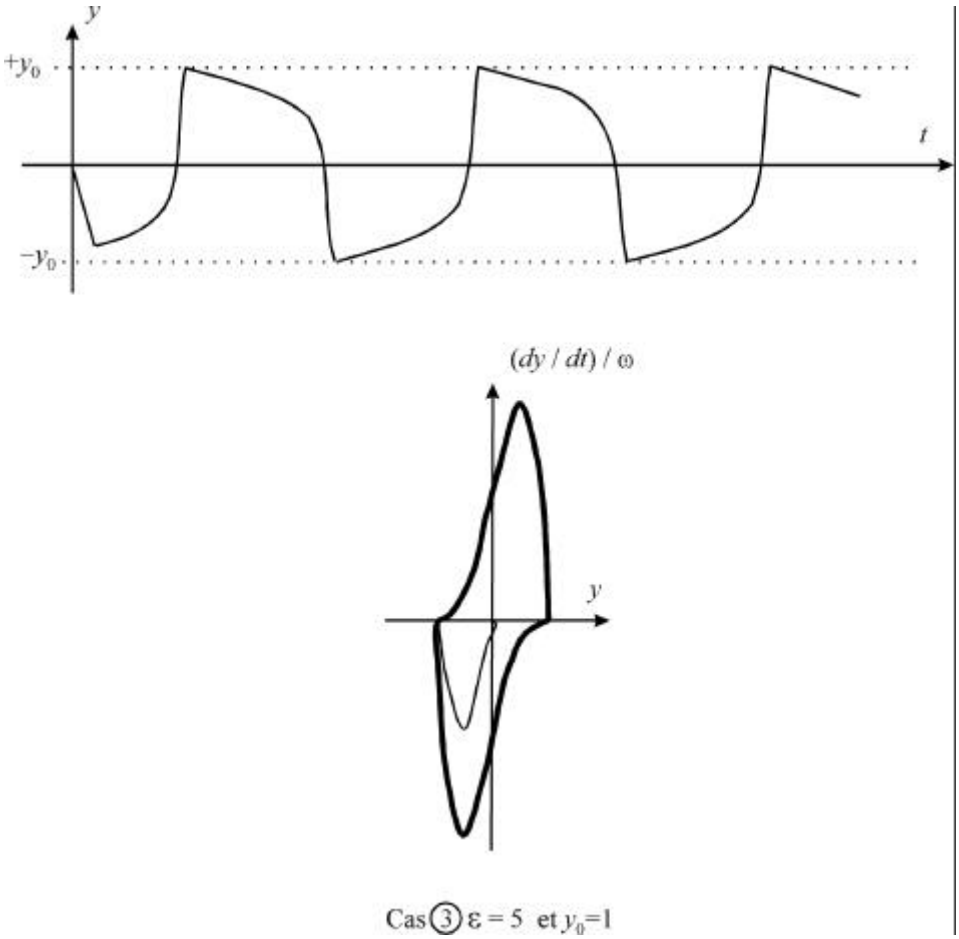
Lorsque l'amplitude de ces oscillations est importante la fraction devient supérieure à l'unité et le terme change de signe, l'amplitude des oscillations décroît exponentiellement, le système évolue alors entre deux états limite infiniment proches qui définissent l'amplitude et la forme des oscillations.

On comprend déjà intuitivement que le terme en y_0 sera responsable de la valeur de l'amplitude des oscillations alors que ε va influer sur le caractère plus ou moins sinusoïdales de celles-ci.

2.Approche théorique assistée par ordinateur

De même que nous avions étudié le comportement de l'oscillateur paramétrique grâce au logiciel de M. LEPRETRE, on peut programmer cette équation différentielle et étudier, en fonction des paramètres caractéristiques, le comportement de ce système.



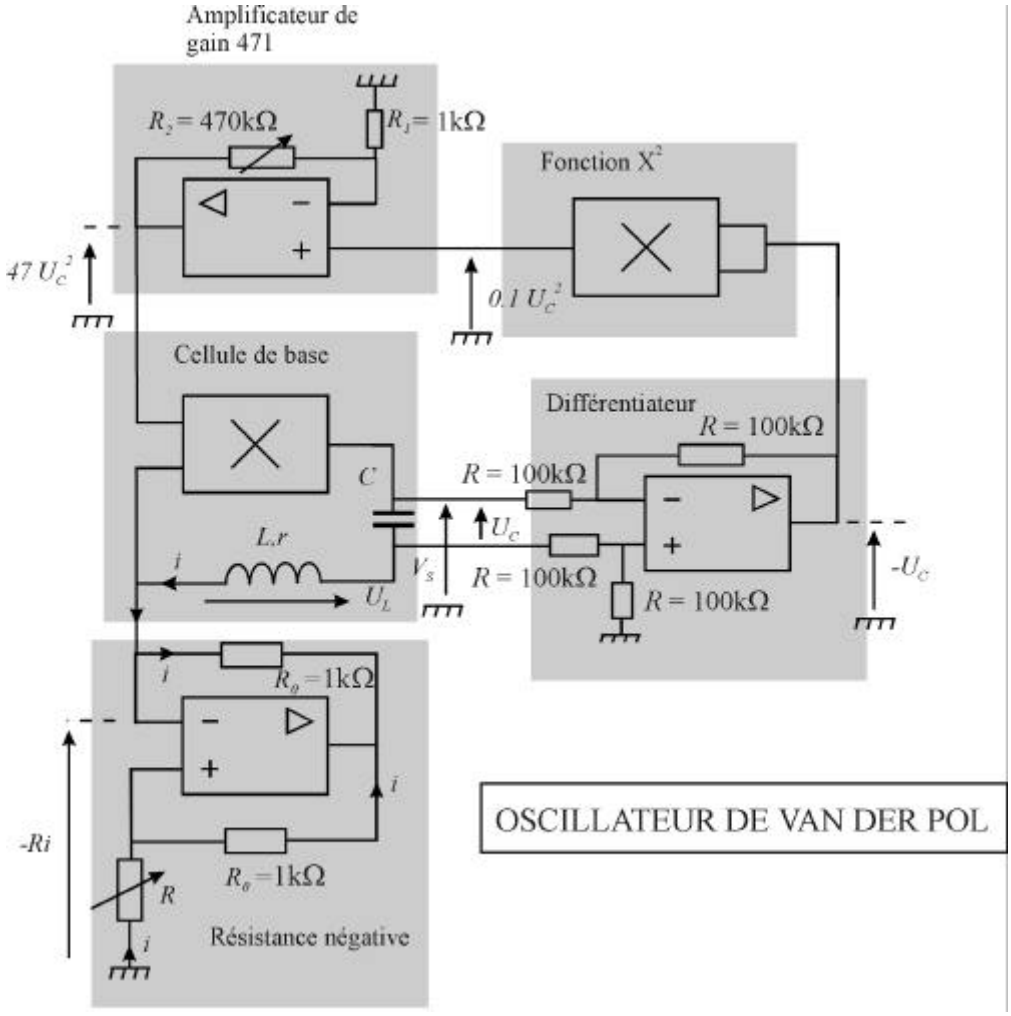


On constate que notre intuition était bonne, le paramètre ε influe effectivement sur le caractère plus ou moins harmonique des oscillations. Plutôt que de se lancer dans une étude théorique lourde je vous propose de réaliser le montage électronique du paragraphe suivant et de constater expérimentalement l'accord entre les résultats donnés par l'ordinateur et le montage.

3.Etude expérimentale

a)Analyse du montage

On propose de réaliser le montage suivant



Le montage, d'apparence complexe, s'interprète en fait facilement. L'oscillateur est constitué d'une cellule de base et de quatre éléments auxiliaires qui permettent de réaliser le comportement prévu par l'équation différentielle présentée en début de chapitre.

- La cellule de base est constituée d'un multiplieur qui délivre une tension de sortie V_S proportionnelle aux produit des entrées, le facteur de proportionnalité étant de $0{,}1\mathrm{V}^{-1}$

pour le circuit AD734. On obtient :

$$V_S = k\,K^2 U_C^2 \left(-Ri\right)$$

D'autre part on peut appliquer la loi des mailles au niveau de la maille constituée par $V_S, C, (L, r)$ et $-Ri$,

$$V_S = U_C + U_L - Ri$$

On égale les deux expressions,

$$-kK^2 U_C\, Ri = U_C + U_L - Ri$$

Or $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU_C}{dt}$ que l'on remplace dans l'équation précédente, d'où :

$$LC\frac{d^2 U_C}{dt^2} + -RC\left(1 - kK^2 U_C^2\right)\frac{dU_C}{dt} + \omega^2 U_C = 0$$

On pose $\omega^2 = \frac{1}{LC}$, $\varepsilon\omega = \frac{R}{L}$ et $U_0^2 = \frac{1}{kK^2}$, d'où l'équation suivante :

$$\ddot{U}_C - \varepsilon\omega\left(1 - \frac{y^2}{y_0^2}\right)\dot{U}_C + \omega^2 U_C = 0$$

On obtient bien l'équation différentielle proposée par Van der Pol.

- Il faut noter que nous avons implicitement fait l'approximation $R >> r$ où r est la résistance interne de la bobine.
- La résistance négative est obtenue par un montage classique, mais qui ne doit jamais être en saturation contrairement au montage présenté dans le chapitre 1.
- Le bloc différentiateur peut être obtenu par le montage soustracteur proposé ou par un différentiateur de gain 1 du type AD620. Il faut noter que le courant qui circule entre le condensateur et la bobine ne doit pas être dévié par ce bloc, d'où la liaison à la borne + à ce niveau et surtout de fortes valeurs de résistances constituant le soustracteur. On obtient en sortie $-U_C$ ce qui n'est pas gênant puisque le bloc suivant élève cette tension au carré.
- Le bloc suivant est simplement constitué d'un multiplieur dont les entrées sont communes afin de former le carré de $-U_C$.
- Les valeurs faibles des coefficients des multiplicateurs conduisent, pour éviter la saturation de certains amplificateurs opérationnels, à introduire un montage amplificateur non inverseur de gain *k* ajustable.

b)Composants du montage

Les composants choisis sont les suivants :

- (L, r) est une bobine AOIP de 0.1H qui présente une résistance interne de ~ 40 Ω.
- C est un condensateur d'une capacité de 27 nF de type film plastique pour éviter une trop faible résistance parallèle.
- Les résistances R_0 du montage à résistance négative ont des valeurs de l'ordre du kilo-ohm, ce qui permet d'éviter la saturation même pour des courants d'une intensité de l'ordre de 10 mA. La résistance variable permet d'ajuster le paramètre ε, un potentiomètre de 10 kΩ sera parfait.
- Les résistances du montage différentiateur sont toutes égales entre elles de sorte que le gain global soit de 1, on choisira cependant des valeurs élevées pour que l'impédance d'entrée de ce montage soit suffisamment importante pour ne pas perturber la cellule de base.

- Les résistances de l'amplificateur non inverseur sont telles que le gain doit évoluer entre 100 et 1000.

c)Résultats expérimentaux

On peut observer les signaux grâce à un oscilloscope numérique aux bornes de la résistance négative, ce qui nous donne une image de $\frac{dU_C}{dt}$ et à la sortie du montage différentiateur, ce qui nous donne une image de U_C. Pour visualiser le comportement du montage dans le plan de phase il suffit de se placer en mode XY au niveau de l'oscilloscope.

Les différents oscillogrammes obtenus sont donnés en annexe pour des valeurs de résistances négatives correspondants aux trois domaines de ε présentés dans l'étude théorique.

Le gain de l'amplificateur étant fixé à 470, la valeur de U_0 est de l'ordre de 0,45V. Dans le cadre de l'approximation $R >> r$, ε est donné par $\varepsilon \approx R\sqrt{\frac{C}{L}}$, avec les valeurs numériques des caractéristiques des composants utilisés cette relation s'écrit $\varepsilon \approx 5 \cdot 10^{-4} R$.

Le premier oscillogramme correspond à $R = 1700 \quad \Omega$ soit $\varepsilon \approx 0{,}9$, on sent les premiers éléments de la déformation du cycle.

Le deuxième correspond à $R = 4700 \quad \Omega$ soit $\varepsilon \approx 2{,}4$ la déformation du cycle s'accentue et s'identifie à celle obtenue pour le cas n° 2 où nous avions introduit pour ε une valeur unité.

Le dernier cas correspond à $R = 10000 \quad \Omega$ soit $\varepsilon \approx 5$ et on constate une forte déformation du cycle qui laisse deviner celui obtenu par le calcul théorique, cependant des phénomènes annexes limitent l'intensité du courant électrique dans le montage et le pic n'est pas aussi violent que prévu.

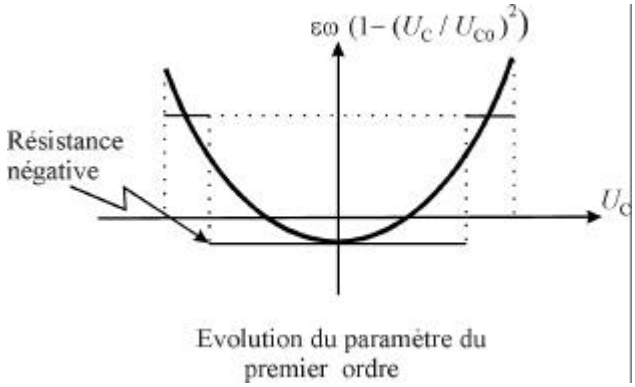
La sensibilité sur la voie 1 étant de 0,1V par division pour le premier enregistrement et de 0,2V par division l'amplitude est bien constante et de l'ordre de 0,45V.

d)Conclusion

Ce montage permet de réaliser un oscillateur de Van der Pol et surtout d'en suivre le comportement caractéristique. On comprend le rôle majeur joué par le coefficient du terme du premier ordre dans l'équation différentielle de l'oscillateur.

Dans le cadre de l'étude du montage dit à résistance négative nous avions de même mis en évidence une déformation du cycle pour des valeurs élevées de la différence $R - r$, nous avions tracé le comportement du coefficient du terme du premier ordre en fonction du paramètre caractéristique du montage.

Nous nous proposons ici de faire un graphe analogue



Evolution du paramètre du premier ordre

On constate de même que pour de faibles valeurs de ε le puits est très « plat » et comme pour la résistance négative le « saut » étant très léger l'écart à l'harmonicité est faible.

L'allure similaire de l'évolution du coefficient du terme du premier ordre rend compte du comportement analogue suivi par ces deux oscillateurs.

II. L'effet Kerr optique

On modélise souvent le comportement d'un matériau traversé par une onde électromagnétique par celui d'un oscillateur linéaire. En effet le modèle de l'électron élastiquement lié nous permet d'écrire, pour un atome soumis à un champ électrique du type $E = E_0 \cos\omega t$, l'équation suivante

$$m\ddot{x} = -k\,x + qE_0 \cos\omega t$$

où m est la masse de l'électron et k la constante de rappel de la force élastique. En l'absence de champ électrique on retrouve l'équation différentielle classique d'un oscillateur linéaire à une dimension.

Cependant on constate que pour des champs électriques intenses la modélisation de la force de rappel doit être complétée par un terme d'ordre trois

$$\vec{f} = -m\left(\omega_0^2\,x + D\,x^3\right)\vec{e_x}$$

Dans cette expression on a posé $k = m\omega_0^2$ et le coefficient D du troisième ordre garde une valeur faible devant celui du premier ordre.

1.Résolution de l'équation différentielle

L'équation différentielle s'écrit maintenant

$$m\ddot{x} + \omega_0^2\,x + D\,x^3 = 0$$

On admet que l'équation différentielle peut être résolue en remplaçant x par la somme $\left(x_l + x_{nl}\right)$ où $\left(x_l\right)$est la solution de l'équation linéaire et $\left(x_{nl}\right)$ le terme non linéaire. L'amplitude du terme non linéaire est toujours très inférieure à celle du terme linéaire ce qui justifie le développement limité suivant :

$$\left(x_l + x_{nl}\right)^3 \approx x_l^3\left(1 + \frac{3x_{nl}^3}{x_l}\right)$$

On remplace dans l'équation différentielle, on néglige $3D\,x_l^2\,x_{nl}$ et on obtient finalement :

$$\ddot{x}_{nl} + \omega_0^2\, x_{nl} = -D\,x_l^3$$

La solution linéaire de l'équation différentielle est du type $x_l = C\cos\omega t$, l'équation s'écrit :

$$\ddot{x}_{nl} + \omega_0^2\, x_{nl} = -D\left(\frac{3C^3}{4}\cos\omega t + \frac{C^3}{4}\cos 3\omega t\right)$$

On pose : $\frac{3DC^3}{4} = A$ et $\frac{DC^3}{4} = B$.

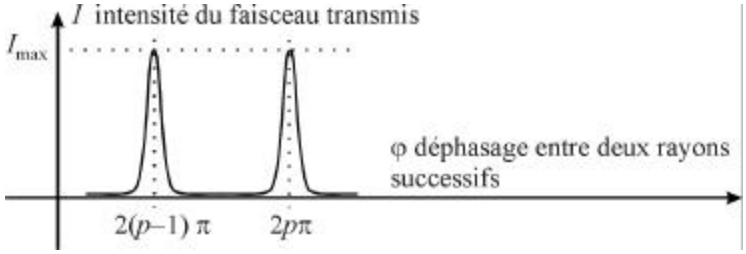
Il est légitime de chercher les solutions sous la forme :

$$\begin{cases} x_{nl1} = \alpha\cos\omega t \\ x_{nl2} = \beta\cos 3\omega t \end{cases}$$

Le premier terme correspond à la solution classique, alors que le second terme apparaît comme une onde de fréquence triple. Le matériau présente alors un indice *n* de la forme $n = n_0 + n'I$ où *I* est l'intensité du faisceau lumineux incident.

2.Application à l'optique non linéaire

Certains matériaux présentent de tels effets (appelé effet Kerr optique), il peuvent être placés dans une cavité semi-réfléchissante et l'intensité du faisceau lumineux dans la cavité n'est plus uniforme mais s'accumule dans certaines zones de celle-ci (ondes stationnaires). On peut représenter l'intensité *I* en fonction du déphasage φ entre deux rayons transmis successifs par la courbe suivante (fonction d'Airy) :



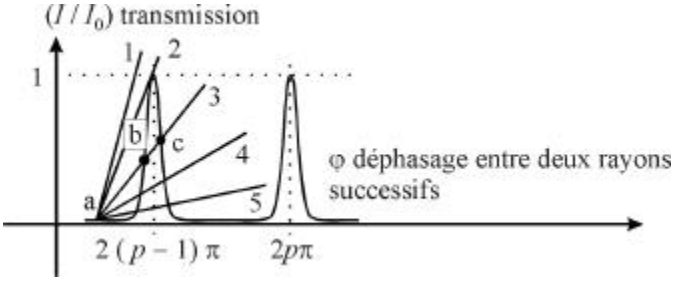
On peut aussi tracer la transmission de la cavité en ramenant *I* à $\frac{I}{I_0}$.

L'indice du matériau s'exprime par $n = n_0 + n'I(\varphi)$, le déphasage φ se déduit par :

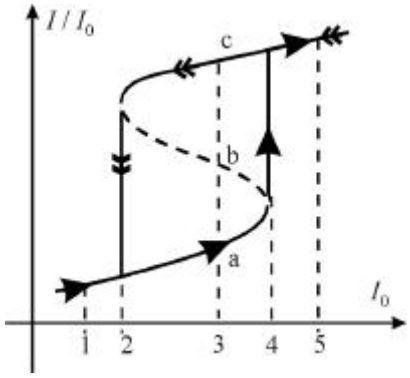
$$\varphi = \frac{4\pi n\,a}{\lambda} = \frac{4\pi n_0\,a}{\lambda} + \frac{4\pi n'\,a}{\lambda} I$$

$$I = \left(\varphi - \frac{4\pi n_0\,a}{\lambda}\right) + \frac{\lambda}{4\pi n'\,a} = A'\varphi + B'$$

où *a* est la largeur de la cavité et λ la longueur d'onde. Cette expression de *I* peut elle aussi se ramener à celle de la transmission de la cavité est celle de l'équation d'une droite dans le plan $\left(\varphi, \frac{I}{I_0}\right)$. On se propose de reporter sur le graphe précédent une telle droite.



Il est intéressant à ce stade d'exprimer la transmission de la cavité en fonction de I_0 on obtient une courbe du type suivant :



On reconnaît là une courbe caractéristique d'un cycle d'hystérésis. C'est ce type de montage qui sert de support à l'élaboration de transistors optique.

Le thème abordé dans ce paragraphe est celui du concours général proposé aux élèves des classes terminales en 1992.

III. Matériau doubleur de fréquence

Dans le même esprit certains matériaux présentent une réponse telle que, si ils sont éclairés par une onde de fréquence *f* ils génèrent une onde de fréquence double. Cette application est utilisée pour fabriquer des laser de couleur verte qui sont en fait des laser infrarouge sur lesquels on a disposé en sortie un matériau doubleur de fréquence.